6 класс

1. Олег написал на доске трехзначное число, Егор приписал к нему слева цифру 5, в результате чего число Егора оказалось в 9 раз больше, чем число Олега. Какое число написал Олег?

Ответ: 625

Указание: $5000 + x = 9x$; $x = 625$.

2. Петя идет от дома до школы 30 мин, а его брат Саша – 40 мин. Через сколько минут Петя догонит Сашу, если Саша вышел из дома на 5 минут раньше Пети?

Ответ: 20 мин.

Указание: На весь путь от дома до школы Петя тратит на 10 мин меньше брата. Значит, на половину пути он потратит на 5 мин меньше и встретится с Сашей ровно на половине пути от дома до школы.

3. За столом сидело несколько жителей острова рыцарей и лжецов. Путешественник спросил каждого про его ближайших соседей. Каждый ответил: «У меня оба соседа – лжецы». Путешественник сказал: «Если бы вас было на одного больше или на одного меньше, я бы смог узнать, сколько среди вас рыцарей. А так не могу». Каким наименьшим могло быть количеством человек за столом?

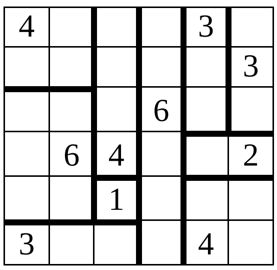
Ответ: 6.

Указание. Рыцари (Р) могут сидеть за столом только по одному между двумя лжецами (Л), а лжецы – либо по одному, либо по двое. Поэтому трое, четверо и пятеро сидящих могут расположиться единственным образом: ЛРЛ, РЛРЛ, ЛЛРЛР. Шестеро сидящих могут расположиться двумя способами: РЛЛРЛЛ, РЛРЛРЛ.

4. Квадрат разделен на 36 маленьких квадратов. Разрежьте его по линиям сетки на прямоугольники так, чтобы в каждом из них оказалось ровно одно из указанных чисел. Это число должно равняться количеству квадратов, попавших в этот прямоугольник

4				3	
					3
			6		
	6	4			2
		1			
3				4	

Ответ:



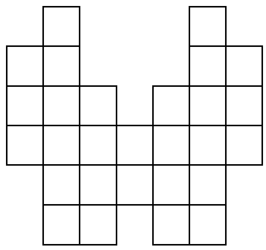
7 класс

1. Используя не более 6 цифр из 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2016. Каждую цифру можно использовать не более одного раза; цифры можно объединять в числа.
Ответ: (681-9)*3, 253*8 – 9 + 1

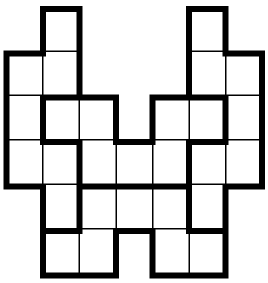
2. Книжный магазин при продаже книги сделал скидку в 10% с первоначально намеченной цены и при этом все же получил 8% прибыли. Сколько процентов прибыли предполагал первоначально получить магазин при продаже книги?
Ответ: 20%
Указание. 90:100 = 108:x; x = 20.

3. Два школьника, живущие в одном доме, одновременно вышли из дома в школу. Первый из них половину всего времени, затраченного на дорогу, шел со скоростью 5 км/ч, а затем шел со скоростью 4 км/ч. Второй же первую половину всего пути от дома до школы шел со скоростью 4 км/ч, а вторую – со скоростью 5 км/ч. Который из школьников пришел в школу раньше?
Ответ: Первый.

4. Разрежьте фигуру на 4 равные части по площади и по форме



Ответ.



8 класс

1. У двух книжных магазинах имеется в продаже одна и та же книга. Через неделю в первом магазине цены на эту книгу были снижены на 10%, а еще через неделю подняты на 20%. Во втором магазине через две недели цены на книгу были увеличены на 10%. В каком из магазинов через две недели цены на книгу стали ниже?
Ответ: В первом.
Указание. В первом магазине через две недели – $x\cdot\frac{90}{100}\cdot\frac{120}{100}=1{,}08x$, а во втором магазине через две недели – $x\cdot\frac{110}{100}=1{,}1x$

2. Вася написал на доске несколько целых чисел. Петя подписал под каждым из Васиных чисел его квадрат. После чего Маша сложила все числа, написанные на доске, и получила 2017. Верно ли, что кто-то из ребят ошибся?
Ответ: Да.
Указание. Предположим, что никто из ребят не ошибся. Если Вася написал числа x_1, x_2, …, x_n, то Петя должен был написать числа $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$. Маша должна была посчитать сумму
$S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = (x_1 + x_1^2) + (x_2 + x_2^2) + \ldots + (x_n + x_n^2)$.
Заметим, что если число a – целое, то число $a^2 + a = a(a + 1)$ – четное. Значит, S – сумма четных чисел, то есть четное число не может равняться 2017.

3. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 15^0$, $\angle B = 30^0$. Отрезок CM перпендикулярен к стороне AC и делит сторону AB на отрезки AM и MB. Найдите отношение отрезков AM и BC.
Ответ: AM : BC = 2.
Указание. Отметим на AM такую точку O, что $\angle ACO = 15^0$. Тогда AO = OC, $\angle COM = 30^0 = \angle B$; OC = CB; $\angle OCM = 90^0 - 15^0 = 75^0 = \angle OMC$; OC = OM. Значит, AM = 2 OC = 2BC.

4. В клетках шахматной доски произвольным образом расставлены все натуральные числа от 1 до 64. Верно ли, что найдутся две соседние по стороне или по вершине клетки, числа в которых отличаются не меньше, чем на 9?
Ответ: Верно
Указание. Предположим противное: разность между числами, стоящими в любых двух соседних по стороне или вершине клетках, не превышает 8. Заметим, что расстояние между любыми двумя клетками не превышает семи «ходов короля». Поэтому разность между числами в любых двух клетках по предположению не превышает 7*8 = 56. Но разность 64 – 1 = 63 > 56. Полученное противоречие доказывает, что предположение ложно и найдутся два числа в соседних клетках, отличающиеся не менее, чем на 9.

9 класс

1. При каких значениях параметра a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?
Ответ: -2.

2. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60 % мальчиков сосед по парте – тоже мальчик, а у 20% девочек соседка по парте – тоже девочка. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки?
Ответ: 100/3 %
Указание. Пусть m – мальчиков, n – девочек. Число мальчиков, сидящих с девочками, равно числу девочек, сидящих с мальчиками, то есть (1 – 0,6) m = (1 – 0,2) n; 0,4 m = 0,8 n; m = 2n. Девочки составляют n/(m + n)·100% = n/(2n + n)·100% = 100/3%.

3. В равнобедренном треугольнике ABC $\angle$B = 100^0. Внутри треугольника взята такая точка M, что $\angle$MAB = 10^0, $\angle$MBA = 20^0. Найдите $\angle$BMC.
Ответ: 80^0.
Указание. Углы при вершине B 80^0 и 20^0. Комбинация углов $80^0 - 20^0 = 60^0$ указывает на построение равностороннего треугольника MDB. Треугольники ABM и CBD равны. $\angle$MAB = $\angle$DCB, $\angle$CDB = 150^0, $\angle$MDC = 150^0, тогда треугольники BDC и MDC равны. $\angle$CMD = $\angle$CBD = 20^0, $\angle$BMC = $60^0 + 20^0 = 80^0$.

4. Сергей записал в клетки таблицы 22 × 22 натуральные числа от 1 до 22^2. Верно ли, что Олег может выбрать такие две клетки, соседние по стороне или вершине, что сумма чисел, стоящих в этих клетках, делится на 4?
Ответ: Верно.
Указание. Предположим, что Олег не сможет выбрать две требуемые клетки. Заменим все числа на их остатки при делении на 4. Тогда в таблице стоит 484 числа, то есть 0, 1, 2 и 3 повторится по 121 разу. Разобьем таблицу на 121 табличку 2 × 2. В каждой такой табличке может стоять не более одного нуля и не более одной двойки. Но так как количество табличек равно количеству нулей и количеству двоек, то в каждой табличке стоит ровно один ноль и ровно одна двойка. Заметим, что в каждой табличке два оставшихся числа оба должны быть либо единицами, либо тройками. Но тогда количество единиц или троек четно, однако их 121 – противоречие.

10 класс

1. Составьте квадратное уравнение с корнями $(a + b)^2$ и $(a - b)^2$, если a и b – корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.
Ответ: $x^2 + (4q - 2p^2)x + (p^4 - 4p^2q) = 0$

2. В параболу $y = x^2$ вписан прямоугольный треугольник (то есть все вершины треугольника принадлежат параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox. Найдите высоту треугольника, опущенную на гипотенузу.
Ответ: 1
Указание. Пусть $A(-x_1,\ x_1^2)$, $B(x_1,\ x_1^2)$, $C(x_2,\ x_2^2)$ – вершины треугольника ABC. $\angle ACB = 90^0$. Точка C принадлежит окружности с диаметром AB. Ее уравнение $x^2 + (y - x_1^2)^2 = x_1^2$, поэтому $x_2^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = x_1^2$, откуда $x_1^2 - x_2^2 = 1(\neq 0)$, то есть $x_1^2 - x_2^2 = 1$.

3. Пусть точка H – ортоцентр (точка пересечения высот) остроугольного треугольника ABC. Известно, что AH = BC. Найдите $\angle BAC$.
Ответ: 45^0.
Указание. BK – высота, проведенная к стороне AC. Треугольники AHK и BCK равны (AH = BC, $\angle KAH = \angle KBC = 90^0 - \angle C$), тогда AK = BK, значит, прямоугольный треугольник AKB – равнобедренный и $\angle BAC = 45^0$.

4. В таблицу 4 × 4 записали натуральные числа. Верно ли, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на 3 больше, чем в предыдущем?
Ответ: Нет.
Указание. Пусть S_1 – сумма чисел в первой строке, S_2 – сумма чисел в первом столбце.
Сумма по строкам $S_1 + (S_1 + 2) + (S_1 + 4) + (S_1 + 6) = 4S_1 + 12 = 4(S_1 + 3)$.
Сумма по стобцам $S_2 + (S_2 + 3) + (S_2 + 6) + (S_2 + 9) = 4S_2 + 18 = 4(S_2 + 4) + 2$
Первая сумма делится на 4, а вторая – нет.

11 класс

1. Решите уравнение $x^3 + x + 10y = 2016$ в натуральных числах

Ответ: нет решений в натуральних числах.

Указание. Рассмотрим остатки по модулю 10 выражений x^3, $10y$ и $(x^3 + x + 10y)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
$10y$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$x^3 + x + 10y$	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8

Значит в остатке по модулю 10 выражение дает либо 0, либо 2, либо 8, что не равно 6. Значит в натуральних числах нет решений.

2. В некоторой компании 100 акционеров, и любые 66 из них вместе владеют не менее, чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом все акций может владеть один акционер?

Ответ: 25%

Укзание. Пусть M – акционер, владеющий наибольшим процентом акций: x%. Разобьем остальных 99 акционеров на три группы A, B и C по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a, b и c процентами акций. Тогда

$2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (a + c) \geq 50 + 50 + 50$, то есть $x \leq 25$.

Если каждый из 99 акционеров, кроме М, владеет $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}\%$ акций, то любые 66 из них владеют 50%, а у М – ровно 25 % акций.

3. Выразите величину $a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A$ через S, где S – площадь треугольника ABC; a, b – стороны треугольника ABC; A, B – величины внутренних углов треугольника ABC, лежащих против сторон треугольника a и b соответственно.

Ответ: 4S

Указание. $a^2 \cdot \sin 2B + b^2 \cdot \sin 2A = 2a^2 \cdot \sin B \cdot \cos B + 2b^2 \cdot \sin A \cdot \cos A =$

$$= 2ab\left(\frac{a}{b}\sin B\cos B + \frac{b}{a}\sin A\cos A\right) = 2ab\left(\frac{\sin A}{\sin B}\sin B\cos B + \frac{\sin B}{\sin A}\sin A\cos A\right) =$$

$$= 2ab \cdot \sin(A+B) = 2ab \cdot \sin C = 4 \cdot \frac{ab\sin C}{2} = 4S.$$

4. Пусть на плоскости дана сетка и выбраны произвольно 5 точек в узлах этой сетки. Верно ли, что найдется отрезок, концы которого лежат в выбранных узлах, а его середина – также узел этой сетки?

Ответ: Верно.

Указание. Помещаем сетку в координатную плоскость. Узлы – точки на координатной плоскости с целочисленными координатами. Точек 5, а возможно всего 4 случая комбинации координат точки: (чет; чет), (чет; нечет), (нечет; чет), (нечет; нечет). По принципу Дирихле найдутся две точки с одинаковой четностью координат. Поскольку координаты середины отрезка выражаются полусуммой соответствующих координат концов отрезка, получаем, что координаты середины отрезка – целые числа. Значит, середина этого отрезка является узлом сетки.